

Avant-Propos

«Toutes les propositions de la logique disent la même chose.

À savoir : rien.»

Ludwig WITTGENSTEIN, *Tractatus logico-philosophicus* [250].

L'analytique et le procédural

De nombreux progrès viennent ébranler la conception mathématique au XIX^e siècle. Sans être erronées, les nouvelles théories engendrent des confusions dans l'esprit des mathématiciens de l'époque : la théorie des ensembles produit des contradictions alors même qu'elle ne contient que des principes utilisés dans toutes les mathématiques ; les géométries non-euclidiennes remettent en question non seulement l'axiome des parallèles (donc la méthode axiomatique classique) mais surtout l'évidence de l'espace intuitif. Cette crise partage en profondeur la communauté scientifique tant elle semble détruire la confiance solidement établie en la pérennité de l'édifice épistémologique. S'ensuivent différents mouvements logiques, amenés par des penseurs de provenances diverses (philosophes, logiciens, mathématiciens), aux idéologies scientifiques bien démarquées, et qui élaborent les concepts fondamentaux autour desquels toute la logique contemporaine se déploie. Plusieurs lignes de démarcation traditionnelles permettent d'aborder ce foisonnement théorique selon que l'on s'attache aux différences épistémologiques, philosophiques ou ontologiques.

La première ligne de démarcation oppose deux conceptions de la méthode. L'activité du mathématicien, parfois dévoyée par des procédés incorrects, nécessite le développement d'une éthique. Ce premier travail reste essentiellement conceptuel et donne naissance au constructivisme et à l'intuitionnisme. La démarche est basée sur des considérations souvent non-formelles mais dont l'emprise sur le formel, et sur

le type de démonstrations qu'elles induisent, est particulièrement importante. Une seconde conception laisse de côté la question de l'activité pour se concentrer sur le fondement formel des manipulations mathématiques : c'est la voie axiomatique. Si les mathématiques engendrent des paradoxes, ce ne peut être le fait du formalisme ou des structures formelles employées. C'est donc la façon dont elles sont conçues qui pose problème, et la fondation doit pouvoir assurer les procédés logiques en ne cédant rien à la naïveté des opérations usuelles. Ce travail, essentiellement basé sur l'analyse des structures, se détache néanmoins de la pratique du mathématicien, rompant curieusement de façon brutale avec le projet initial.

La deuxième ligne de démarcation suit le contours tracés par la problématique, éminemment classique, de l'existence des entités abstraites et du statut de la connaissance mathématique.

Dans *On what there is* [199], QUINE fait le parallèle entre les trois théories fondationnelles modernes et les trois doctrines médiévales concernant le statut des universaux. La comparaison n'est pas seulement analogique, car pour QUINE, la réponse à la question de l'existence des universaux et l'utilisation du «critère d'engagement ontologique» permettent de catégoriser de manière adéquate ces philosophies des mathématiques.

<i>statut des universaux</i>	<i>fondements des mathématiques</i>
réalisme	logicisme ¹
conceptualisme	intuitionnisme
nominalisme	formalisme

Le «critère d'engagement ontologique» pose la question de savoir ce qui, dans le discours, trahit la position de l'énonciateur quant à l'existence de certaines entités. Il se traduit en général par l'utilisation de variables liées dans nos énoncés. Nous nous engageons donc à l'égard des entités utilisées comme valeurs pour une variable liée dans un énoncé quelconque. Par exemple dans la proposition $\exists x$ est un homme, nous nous engageons sur l'existence de toutes les entités que nous considérons comme substituables à x . L'espace ontologique est donc balayé par toutes les variables entrant dans le domaine d'un quantificateur. Il est ainsi possible de classer les philosophies des mathématiques selon l'engagement ontologique des énoncés qu'elles sous-tendent. **(1)** Les théories de CHURCH, FREGE, RUSSELL et WHITEHEAD sont classées dans la frange réaliste-logiciste. Cet engagement réaliste est dû au fait que le logicisme permet un usage indifférencié des variables liées pour des entités abstraites ou concrètes, atteignables ou non. **(2)** POINCARÉ, BROUWER et WEYL appartiennent à la frange conceptualiste-intuitionniste. L'intuitionnisme

¹En termes de fondements, le logicisme soutient une triple thèse : i les mathématiques ne sont qu'une extension de la logique, ii les mathématiques sont réductibles à la logique, iii la logique peut être extraite d'une enquête sur le langage des mathématiques.

n'admet en effet l'usage de variables liées que lorsque les entités qui y sont supposées sont constructibles à partir d'éléments donnés par le système dans lequel elles s'intègrent. Les concepts sont ici de purs produits de l'esprit, et doivent donc, à ce titre, être le résultat d'un processus de construction réalisable. (3) Le formalisme de HILBERT est rapproché du nominalisme médiéval. Les entités abstraites n'existent qu'en tant qu'objets du langage, et n'ont donc pas d'existence au sens réaliste du terme. Quine ne reconnaît pas au formalisme de critère d'engagement, dans la mesure où le formaliste ne semble pas permettre au langage de référer à des entités. Il faut toutefois modérer son propos sur ce point, car il y a bien un critère d'existence pour le formaliste mais ce critère ne réside pas dans le rapport à une extériorité. Il est internalisé aux conditions d'exercice de l'axiomatique. Existe alors toute notion qui est consistante avec l'axiomatique, même si cette existence n'est en aucun cas réaliste.

Plusieurs indices permettent d'envisager une troisième démarcation, peu usitée dans la littérature, mais qui a toute son importance dans une étude diachronique. Elle permet de relier les différentes traditions aux développements récents, en résorbant certaines discriminations rendues obsolètes tout en perpétuant certaines nuances encore actuelles.

FRAENKEL [82] fait déjà une opposition similaire entre l'esprit de découverte qui prévaut chez les logiciens et l'esprit d'invention à l'œuvre chez les intuitionnistes. Mais il insiste surtout sur le rapprochement possible entre intuitionnisme et formalisme contre le logicisme. Il propose une classification des théories du fondement des mathématiques en 1935. Les «réalistes modernes», parmi lesquels il compte les logiciens, considèrent qu'une entité mathématique existe dès lors que la non-contradiction du système axiomatique est assurée pour la notion correspondante. Les «idéalistes modernes» quant à eux attendent de toute entité qu'elle soit constructible, ce qui correspond tout à fait aux exigences des constructivistes et des intuitionnistes.

Le formaliste se situe donc, contrairement à ce que nous pourrions croire, entre logiciens et intuitionnistes. Certes, il s'oppose aux intuitionnistes par son refus de réviser les principes de la logique classique. Mais il s'accorde avec eux, contre les logiciens, pour exclure les entités abstraites de l'univers des existants, car la langue mathématique n'est pour lui qu'un pur jeu de symboles.

CAVAILLÈS observe deux tendances de la pensée axiomatique. La première, qu'il rattache à RUSSELL et FREGE, met en cause la méthode logique. Il faut remplacer les opérations rationnelles par un jeu mécanique dont la fiabilité réside dans ses propriétés : imperturbable, impitoyable, incapable de tricher. Cette présentation de CAVAILLÈS pourrait paraître injuste du fait que l'ambition logiciste ne réside pas tant en l'élimination de l'intuition qu'en son contrôle formel. Pour RUSSELL, la logique, comme toute méthode scientifique, est menacée d'incertitude et nécessite une étude

critique des axiomatiques². Mais il est certain qu'est induite ici la possibilité de réduire les raisonnements mathématiques à leur expression dans un certain langage, réduction qui semble être le véritable objet d'attention de CAVAILLÈS dans cette analyse. Leur méthode les amène d'ailleurs à construire une théorie de la référence pour justifier le rapport du formalisme à l'univers qu'il représente. La seconde tendance reprend à son compte la logique traditionnelle, récupérant notamment le cadre du syllogisme, et porte l'accent sur le choix des notions et principes desquels le raisonnement doit partir, avant même d'utiliser un quelconque formalisme. La position de HILBERT induit donc une critique conceptuelle, relative au point de vue initial sur les objets, là où les logicistes prennent le parti de se détacher de la rationalité traditionnelle et de rénover l'usage de la logique. HILBERT ne récuse pas pour autant la part logico-formelle de ce travail fondationnel, mais il prône une position globale envers les objets, avant même de concrétiser une quelconque formalisation.

Mais la différence la plus nette entre ces deux courants tient certainement à l'influence qu'exercent le langage sur RUSSELL, la géométrie sur HILBERT. En revanche, c'est aussi sur ce point qu'un rapprochement s'opère avec l'école de BROUWER, car *«aussi bien du côté de HILBERT que de celui des intuitionnistes un idéal d'évidence a été défini [et malgré le rejet brouwerien d'un modèle mécanique,] axiomatisation et formalisation ne sont plus moments d'une dialectique créatrice mais des uniformes obligatoires»* [35, p.182].

Certes, cette opposition commune à l'analyse linguistique des mathématiques n'a pas les mêmes fondements. Elle prend la forme, chez HILBERT, d'un intérêt profond pour la mécanique axiomatique plutôt que pour le plan de l'expression et de la signification formulaires. La *«nouvelle fondation»* rejette le langage en tant que point de départ de l'investigation logique et annonce, péremptoire, qu'il faut revenir à la dimension minimale et centrale de l'activité mathématique : *«au commencement est le signe, telle est la loi ici»* [125, p.117]. Pour BROUWER, l'opposition à l'analytique est plutôt le produit d'une philosophie globale de la pensée, qui relègue le langage à un simple système de communication d'une volonté mathématique qui motive à elle seule toutes les constructions possibles. S'il n'invoque pas les mêmes raisons, c'est néanmoins une invitation à la même indépendance qui en ressort : *«le premier acte de l'intuitionnisme sépare complètement les mathématiques du langage mathématique [...] et reconnaît que la mathématique [...] est une activité de l'esprit essentiellement sans langage.»* [31, p. 449].

Il n'est donc pas étonnant que ces deux mouvements se soient si durement opposés jusqu'à l'éclatement du conflit de 1939. Car si la démarcation d'avec les logicistes était si tranchée sur les questions de langage, les deux mouvements ont certainement trouvé plus d'intérêt à maximiser leur divergences philosophiques. Pour les intuitionnistes, afin de faire valoir l'originalité de leur démarche par opposition au

²Il suffit, pour s'en convaincre, de voir le nombre de modifications qu'apportera RUSSELL à son axiomatique, et les différentes phases que connaîtra sa théorie logique.

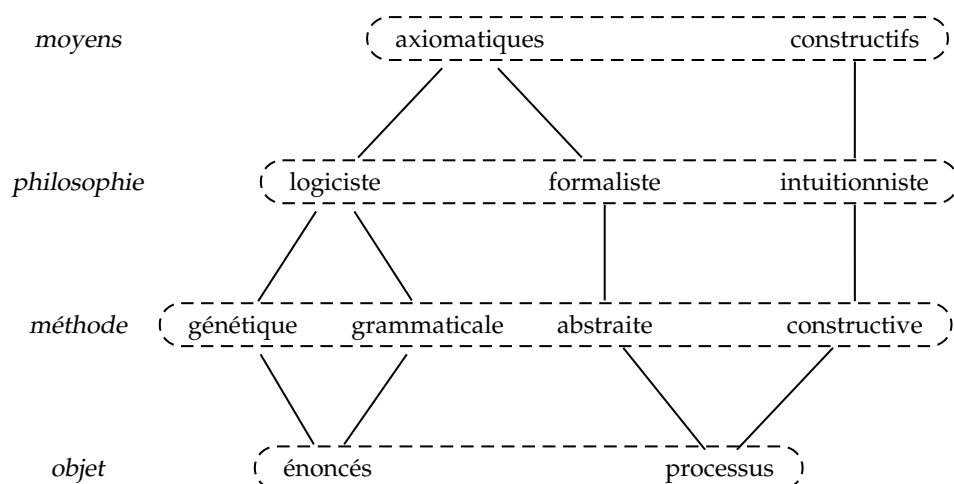
mécanisme ambiant. Pour les formalistes, afin de mettre en avant la continuité avec la logique traditionnelle, se démarquant tout autant du subjectivisme brouwerien que des méthodes axiomatiques en vigueur. HILBERT choisira une "voie refondatrice" et l'entente cordiale avec les logicistes, qu'il respecte peut-être autant par sincérité que par stratégie. Tandis que BROUWER préférera la coupure radicale à l'égard de toute entreprise fondationnelle basée sur la logique classique et développera la "voie réformiste". Il reste néanmoins que les points de rapprochement sont certainement plus profonds que l'apparence du débat ne pourrait le laisser croire.

La postérité de cet enchevêtrement théorique, le lecteur s'en convaincra aisément, n'est pas évidente à communiquer. Chaque mouvement fondationnel méritant à lui seul un travail de fond non seulement pour énumérer ses acquis techniques, mais surtout pour évaluer le legs à la communauté philosophique et mathématique. Il faut remarquer de surcroît que la stricte opposition des intuitionnistes à toute entreprise de formalisation a longtemps retardé la valorisation de leurs idées dans le champ de la logique formelle au sens strict. La notion de système formel, issue des travaux conjoints des logicistes et des formalistes, est toutefois une des constructions les plus solides de cette époque. Elle fixe notamment, pour longtemps, le canevas des études logiques par sa tripartition entre syntaxe, sémantique et déduction³. C'est autour de cette notion que s'élabore par exemple la métamathématique, que se prouvent les grands théorèmes, et qu'avance pas-à-pas la construction de cette science moderne qu'est la logique formelle. Un coup d'arrêt brutal sera pourtant donné avec les théorèmes de limitation, qui vont pour longtemps "plomber" les ambitions formalistes et axiomatiques en général. Cela ne portera pas préjudice, bien au contraire, au dynamisme de la création scientifique dans ce domaine, mais aux idéologies réductionnistes de diverses origines qui profitaient de l'enthousiasme des débuts pour proliférer. Le théorème de GÖDEL notamment, par ses implications philosophiques, détruira toute ambition d'identifier ce qui est prouvable à ce qui est vrai⁴, et, c'est la part positive de ses conséquences, donnera lieu par la suite à une nouvelle naissance de la logique à partir des années cinquante.

Les trois premiers chapitres traiteront de cette période de mise-en-place des thèmes, concepts, méthodes et objets dont sera tributaire toute l'histoire de la logique au XX^e siècle. Nous essaierons de rendre compte, le plus fidèlement possible, de la richesse et la finesse des relations entre mouvements fondationnels tels que présentées ci-contre :

³Cette tripartition est d'ailleurs une ligne de démarcation supplémentaire à ajouter à notre liste, mais que nous n'avons pas retenue pour cette étude. Les logiciens se sont longtemps répartis suivant qu'ils utilisaient des méthodes syntaxiques, sémantiques ou déductives.

⁴Tout en réveillant de bien obscures ambitions mystiques et crypto-mathématiques dans les franges les plus fragiles du "tout petit monde" scientifique et intellectuel.



Une étude synchronique se révélant impossible pour un tableau historique d'une telle complexité, nous serons contraints de séparer cette étude en fonction des projets fondationnels en vigueur à l'orée du XX^e siècle, en suivant la ligne de démarcation que nous venons de proposer, et qui oppose la posture analytique (*cf.* Chap. 1) à celle qui relève du procédural (*cf.* Chap. 2). Puis nous présenterons la notion de système formel ainsi qu'une analyse de sa postérité (*cf.* Chap. 3).

Nature Formelle

Classiquement la relation de signification met en correspondance un élément jouant le rôle de contenu, élément qui appartient tour à tour à la pensée, à la réalité ou à l'univers des symboles, et un contenant formel. RUSSELL définit la signification comme le "ce dont on parle", et nous pourrions, dans la même veine, définir la sémantique en logique comme la tentative de faire correspondre un objet réel avec un objet formel. Mais ce serait oublier le fait que, du point de vue strictement logique, l'objet formel n'a pas moins de réalité que l'entité physique ou psychique qui est censée lui correspondre, puisque ne peut exister en logique qu'une entité **déjà formalisée**. Il faut donc se résoudre à l'idée que l'objet physique et le vécu psychique n'ont, ni en fait ni en droit, d'aptitude particulière à servir de contenu dans le raisonnement, car nous pourrions aussi bien choisir les processus mentaux au titre d'éléments signifiants.

Il semble en revanche que, dans cette identification du contenant au contenu, la pensée elle-même soit à l'œuvre. Le processus permettant d'allouer une signification pouvant être lui-même objet de la représentation plutôt qu'un de ses moyens. Conséquence évidente de ces observations, nous devrions détourner notre attention de ce que la logique est censée représenter vers les processus de représentation de la logique sur elle-même. Nous serions alors disposés à affirmer que la signification

procède de l'activité par laquelle nous manipulons ces entités qui, inséparables dans la réalité, sont distinguées par l'analyse⁵, puis réunies dans notre connaissance au moyen de connexions logiques. Il est en revanche certain, c'est la rupture du lien sémantique entre logique et entités, et la mise-en-place progressive d'une théorie de la signification reliant processus de pensée et processus logiques.

En suivant ce fil directeur, il est désormais facile de relire l'opposition entre classiques et intuitionnistes en termes sémantiques. La logique classique portait essentiellement sur la transmission de valeurs de vérité, et exigeait comme condition de possibilité d'une théorie de la démonstration que la vérité soit conservée dans toutes les opérations logiques possibles. Un tel système n'est pas très difficile à obtenir, les logicistes ont bien formalisé cette exigence en promouvant un cadre déterministe et calculatoire à une telle logique des valeurs. Pourtant, le système obtenu, même s'il a l'avantage d'être effectif au sens où peut l'être une procédure de calcul, n'est pas très riche du point de vue sémantique alors qu'il semblait formaliser l'essence de la signification. La théorie de la vérité pourrait même être redondante avec ce que nous apprend déjà la syntaxe. Car la discrimination du vrai et du faux n'est qu'une des manifestations de l'opérationnalité, un épiphénomène découlant des relations de symétrie entre éléments du système des propositions. Nous pourrions donc considérer que l'objet véritable de la logique n'est pas tant «*l'être vrai*», comme tend à le croire FREGE, que les processus par lesquels des symétries et des ruptures de symétrie confèrent individuellement aux propositions une valeur dans le système global des propositions.

La mouvance intuitionniste évite de faire référence à de telles notions épistémiques pour se focaliser sur la démonstration vue comme activité constructive, unifiée par la dépendance à un esprit qui la réalise et fait par ce biais l'expérience d'une vérité qui acquiert, par cet effet, un caractère empirique. En fait, le cœur conceptuel de la vérité intuitionniste réside plus dans l'acte subjectif de démontrer que dans la démonstration elle-même. Il ne faut donc pas s'étonner de constater une convergence, après la vague dogmatique du début du siècle, entre les disciples lointains du formalisme et de l'intuitionnisme. L'"objet-preuve" finit en effet par donner raison aux intuitionnistes pour la partie critique et conceptuelle du programme, et aux formalistes pour la partie méthodologique (la voie abstraite étant devenue le moyen incontournable de toute formalisation logique). Évidemment, chacun conserve ses positions philosophiques, et l'"objet-preuve" établit la convergence à un niveau d'abstraction supérieur, dans lequel les moyens formels sont nécessaires à la compréhension du phénomène, et où la démonstration, même sans être conçue "en acte" (à la manière intuitionniste) est néanmoins replacée dans sa naturalité propre, par référence aux processus réels dont la pensée mathématique fait l'usage⁶.

⁵Entendons par là, par exemple, la traduction dans un langage formalisé d'énoncés d'observation.

⁶GENTZEN lui-même, éminent formaliste, fonde le calcul des séquents et la propriété du *Hauptsatz* par réf-

Les travaux de GENTZEN sur la coupure et la dynamique des preuves constituent sans nul doute un moment décisif du renversement conceptuel auquel nous consacrons cette étude. La procédure par laquelle s'éliminent les coupures donne à la logique un fondement stable et autonome. Ses liens avec l'activité même de penser sont profonds et permettent d'éviter le recours à ce que Granger appelle une «*sémantique naïve*», c'est à dire une interprétation des opérations en termes d'usages rationnels "de tous les jours". La relation entre théorie logique et rationalité se situera donc à un niveau plus abstrait, celui de la structure et de la profondeur. Les constructions logiques correspondent à des structures de la pensée, observables sur la face cachée de nos usages rationnels, c'est à dire dans les processus prévalant à la description linguistique qu'il est possible d'en faire. Reprenant à notre compte ici la distinction chomskyenne entre structure de surface et structure profonde, nous dirons que la surface de nos raisonnements prend une forme linguistique inapte à rendre compte de la structure profonde qui y prévaut. Et si, comme le pense BROUWER, le formel n'équivaut jamais totalement à l'intuitif, il n'en reste pas moins que c'est en profondeur que se joue l'équivalence entre processus formels et processus cognitifs, et certainement pas au niveau de l'expression.

Nous constaterons, dans les trois chapitres centraux (cf. Chaps. 4, 5 et 6), la montée en puissance de la règle de coupure (le *modus ponens*), qui sera placée au centre même de l'étude logique par GENTZEN et prendra progressivement une place prépondérante dans la problématique de la norme logique. Nous serons donc amenés à questionner l'aptitude de cette notion à fonder la relation entre structures logiques et structures de la pensée. L'esprit a besoin de "couper" pour faire des économies cognitives, il évite de redéployer toutes les étapes intermédiaires d'une sous-preuve dans chaque démonstration. La coupure est aussi un moyen pratique pour faciliter la recherche de démonstration et contourner certaines difficultés. Plutôt que de prouver directement une proposition, l'agent peut faire usage d'autres propositions déjà démontrées par ailleurs, et ayant quelque rapport avec les fins qu'il poursuit. Inversement, dans son activité de justification, l'agent cognitif doit parfois développer pas-à-pas toutes les étapes reliant un ensemble d'hypothèses à ses conséquences, et rendre explicite toutes les coupures en décrivant exhaustivement les sous-démonstrations d'une preuve. La coupure est donc un élément central de la modularité : elle constitue un renvoi à une routine externe pour n'en récupérer que le produit. Et l'élimination fait appel à la justification par le processus qui retrace l'historique exact de la démonstration (modules et sous-modules compris), quitte à reproduire plusieurs fois un sous-module dans une même démonstration. Il y a donc ici deux activités fondamentales de la pensée rationnelle : réduire et déléguer des actions modulaires, expliciter et tenir compte de toutes les étapes. Et c'est dans l'interdépendance entre ces deux activités que se fonde, semble-t-il, le pouvoir de la logique.

rence à la naturalité propre au logique.

Toute la période qui court des années 1950 aux années 1980 est marquée par une tendance de fond dont l'ambition est de pacifier la logique. Après des années de lutte dogmatique et l'effondrement de l'Europe, les logiciens n'ont plus le cœur à l'affrontement métaphysique. Mais il faudrait sans nul doute faire remonter à GENTZEN cette posture pragmatique qui tend à organiser le domaine pour en faire une science plutôt qu'une machine de guerre. Avec le théorème du Hauptsatz, la logique trouve ainsi un point d'appui stable, cohérent avec son histoire, transversal aux oppositions constructivo-formalistes (cf. Chap. 4).

Cet esprit structuraliste touche toute une génération de chercheurs au point de gommer quelque peu leurs oppositions philosophiques et scientifiques. Ainsi PRAWITZ comme KREISEL, MARTIN-LÖF comme DUMMETT se retrouvent pour affirmer et renforcer l'unité logique. La philosophie qui en résulte est, malgré les nuances, largement consensuelle, car cette époque se caractérise par une recentration, à défaut d'une unification totale, autour de quelques idées-forces qui restent à ce jour primordiales :

- L'objet de la logique c'est la notion de structure.
- La norme logique est réglée par la dynamique de l'élimination des coupures
- La constructivité⁷ est la propriété essentielle de l'objet logique.
- L'étude de la logique doit être critique tout en visant l'unité.

Si les variétés conceptuelles sont relativement moins marquées que dans la période précédente, c'est probablement du fait qu'elles relèvent plus du positionnement individuel de ces chercheurs relativement au domaine d'application de la logique. Dans une certaine mesure, l'interrogation principale qui anime ces positionnements individuels concerne donc le fait de savoir ce que la logique peut représenter, puisqu'un accord presque unanime s'impose quant à la forme prise par la nature logique (cf. Chap. 5). Pour PRAWITZ, la question est fondamentalement liée à celle de la signification. La voie choisie par MARTIN-LÖF est plus abstraite et concerne la caractérisation des règles de la pensée. Si le structuralisme atténue les lignes de fracture sur la question de l'objet logique, il a ce mérite de concentrer les efforts sur les propriétés pertinentes de l'objet, et d'ouvrir ainsi la voie à un paradigme de la conaturalité. Trois développements en particulier vont en assurer l'avènement. C'est d'abord le fait que l'élimination des coupures soit désormais entendue comme **phénomène** central en logique. Le qualificatif de phénomène est ici important dans la mesure où il suppose que nous ne sommes plus face à un simple appareillage technique mais à une propriété de fond, un schème organisateur. D'où l'idée qu'à la fois c'est une norme logique qui est découverte, et que cette norme réfère à une conaturalité, une organisation de la nature même des processus. Cette conaturalité invite donc à rechercher des terrains d'exercice nouveaux, des lieux théoriques par les-

⁷Comme nous le verrons dans les chapitres correspondants, la constructivité ne doit pas être entendue ici au sens "constructiviste", mais plutôt comme l'ensemble des propriétés qui font qu'une construction se révèle adéquate.

quels puisse être assurée une convergence avec des phénomènes de même nature. Et c'est par le développement des acquis formels (calculabilité, fonctions, preuves) que se réalisera une première convergence, autour notamment de l'isomorphisme de Curry-Howard, correspondance qui donne la clef pour passer de la logique aux mathématiques, puis à l'informatique et plus tard à la cognition (cf. Chap. 6).

Le tournant géométrique

À cette étape, nous pouvons nous demander si la distinction entre forme et contenu préexiste au recours au symbolisme, ou si elle est constitutive de l'expression même du vécu humain. Il faudrait alors imaginer un univers dans lequel rien n'ait la qualité d'être signe et de signifier, tant il paraît évident que la dualité forme-contenu ne saurait être séparée de la fonction symbolique. Comme le fait remarquer GRANGER [119, p.34], même si elle «*suggère une séparabilité matérielle [elle est par dessus-tout] une opposition de sens, c'est à dire une fonction dans un univers symbolique*». Ce qui signifie qu'il nous est impossible de nous extraire de l'univers déployé par l'opposition du formel au contentuel sans rendre par là-même impossible l'analyse et la compréhension en fonction de cette même opposition.

Il est donc difficile d'accepter la thèse selon laquelle les formes de base de la pensée logique seraient transcendantes, c'est à dire préexistantes à l'exercice même de la pensée rationnelle. Il n'y a évidemment pas d'être logique, c'est à dire d'état de nature logique, précédant l'exercice concret de l'activité logique, de la même façon qu'il ne peut exister d'être humain à l'état de nature, hors de toute activité sociale, sauf en tant que fiction rationnelle utile à quelque construction théorique. Il est donc inutile de chercher à justifier les pratiques logiques en tant que dispositions à penser dont tout un chacun serait doté par la nature. Il est par contre possible de théoriser un modèle de l'univers de la signification, rendant compte des pratiques, sur la base des déterminations de l'organisation symbolique. Car il y a tout lieu de penser que la structure même de l'univers des signes abstraits, cette naturalité propre au procédural, est le miroir de nos pratiques rendues à leur forme la plus désincarnée. En clair, formes et contenus, tels qu'étudiés en logique et en philosophie, doivent être explicités par la structure même de l'univers des signes, plutôt que de la fonder. Sous certains aspects il est évident que nos jugements sont formatés et donc contraints par la forme logique que nous leur donnons. Mais les significations, que nous sommes censés représenter grâce à la forme logique, ne peuvent être communiquées indépendamment de celle-ci. La forme est donc tout à la fois ce qui est imposé au contenu, et ce qui en permet l'extraction. Et il nous est impossible de décider si c'est la forme qui s'impose au donné contentuel, ou si le contenu est un donné expérientiel issu de notre manipulation de la forme. Il serait donc bienvenu d'abandonner toute ambition de séparer forme et contenu, tant leur indépendance semble contestable.

Nous savons que FREGE et RUSSELL, tout en mettant en avant l'imperfection fondamentale des langues naturelles, qui ne peuvent exprimer nos pensées de manière non ambiguë, cherchaient toutefois à développer un langage permettant de contourner ces difficultés au moins pour tout ce qui concerne les contextes scientifiques et rationnels. La réussite d'une partie du programme avait toutefois relativisé l'idée de désambiguïsation en montrant que la traduction dans une langue formelle des énoncés de la langue naturelle supposait des choix de traduction et donc une intention dont le locuteur ou l'interprétant devaient prendre en charge la responsabilité. Cette ambition partait implicitement de l'idée que la forme d'une théorie scientifique est celle d'une langue idéale, sans ambiguïté et sans contradictions. Il est pourtant possible de partir d'un point de vue totalement différent, en considérant que la forme d'une théorie scientifique correspond à la mécanique des relations qu'entretiennent ses différentes propositions. Du coup, la logique peut s'orienter vers une théorie de la dynamique des formes qui constituent le système des significations. Évidemment, ces significations diffèrent relativement au sujet qui les observe, mais la dynamique qui les sous-tend est la même : la dynamique constitue donc l'invariant qui transcende les différences de sens. QUINE est un des penseurs en philosophie de la logique qui a le plus ardemment défendu cette position, il nous sera donc utile, dans l'optique de définir ce que devrait apporter une théorie moderne de la structure logique, de revenir sur ses propos et notamment sur la critique qu'il a produit de la notion même de proposition (*cf.* Chap. 7).

Le point de départ de toute entreprise formelle c'est de donner corps à la séparation, que nous percevons tous, entre ce qui appartient à l'empirie et ce qui en est indépendant. La forme renvoie à l'identité de la chose dont elle est la forme, elle en est la structure, révélée ou découverte, qui permet donc d'identifier une multitude d'entités et de processus rendus distincts par la perception. Cette identification ne se fait pas dans l'empirie, mais sur la base de grilles discrètes d'appréciation, au regard de structures formelles que nous reconnaissons dans le donné perceptif. C'est donc toujours dans un certain cadre formel que nous reconnaissons des régularités, et ce qui intéresse le logicien ce sont les attitudes de pensée qui nous permettent d'accorder ou non notre assentiment à un jugement procédant de cette sorte. La formalisation a donc un intérêt pratique et technologique puisqu'elle permet la reproductibilité, la communicabilité, l'applicabilité d'une structure à une multitude de cas particuliers. Et, en ce sens, tout ce qui fait le formel réside dans la notion de règle. Une règle respecte deux *requisites*. **(1)** Elle doit tout d'abord permettre l'application à de nombreux cas similaires, et s'exprime donc en faisant abstraction d'une certaine partie du contexte grâce à l'usage de variables. Tout ce qui n'est pas variable, est ainsi du domaine de la règle, plus exactement de sa signification. **(2)** Elle doit aussi permettre la reconnaissance des cas auxquels elle peut s'appliquer, car toute règle s'effectue dans un certain contexte, en réponse à certaines conditions. La règle se donne donc avec les

conditions de sa réalisation⁸.

En tant que support fondamental du formel, elle tient une position particulière. Elle évacue ce qui doit être considéré comme négligeable, tout en délimitant précisément les cas dans lesquels il est adéquat de l'utiliser. La règle navigue donc à l'interface entre la norme et le fait, car, elle fixe l'usage dans un contexte déterminé qui conditionne la manière dont elle sera appliquée et l'effet qu'elle produira. Mais elle pré-suppose aussi la reconnaissance de certaines conditions d'applicabilité autant que l'interdiction de situations inadéquates. Les positions de WITTGENSTEIN vont dans ce sens, et une grande partie de ses remarques sur les fondements des mathématiques ou sur la grammaire philosophique contribue à dévoiler la nature de la règle, le statut des notions de démonstration formelle et de démonstration intuitivement valide, et à éclairer les liens entretenus avec la signification. Nous mettrons donc à profit une courte étude de sa pensée pour placer en perspective les apports conceptuels et techniques abordés jusqu'ici (cf. Chap. 8).

Alors que logique classique et logique intuitionniste peinaient à rendre compte avec toute la justice qu'il se doit de cette double nature formelle, entre la dynamique globale de constitution de l'univers des significations et la prise-en-compte de l'aspect interactif et géométrique des notions de règle et de démonstration, un nouveau point de vue apparut. Ancré profondément dans le procédural, ce dernier permettait de rendre compte, dans un même formalisme, des déterminations statiques et dynamiques issues de la logique historique, et de la dimension holiste et interactive rendue incontournable par des considérations épistémologiques et cognitives. Il est tout à fait étonnant que les remarques de QUINE comme de WITTGENSTEIN, qui ne prévoient pas, au moment de leur formulation, qu'un quelconque système formel puisse un jour en rendre compte, aient rencontré une telle confirmation technique. Logique linéaire et ludique (cf. Chap. 9) apportèrent non seulement une mise-en-œuvre pratique de ces intuitions philosophiques, mais placèrent au centre même du logique l'interactivité et l'aspect cognitif de nos constructions : Le statique correspond aux états dans lequel peut se trouver un système à un moment donné de son évolution, et appartient donc au cadre développé par la conception analytique. Le dynamique traite des processus modifiant ces états, et permet de représenter des actions portant sur des situations, c'est donc une conception processuelle. La conception géométrique et interactive apporte à cette dualité de nombreuses perspectives nouvelles, rendues effectives par l'unification et le dépassement des points de vue qu'elle promet. Nous étudions alors des processus dans lesquels l'exécution est dé-

⁸Comme l'a fait remarquer WITTGENSTEIN, ce deuxième caractère de la règle peut engendrer une régression à l'infini, dans la mesure où la règle nécessiterait, pour son emploi, une "sur-règle" précisant les conditions dans lesquelles elle doit être employée. Nous analyserons cette question en (cf. Sec. 8.1). Dans l'attente, considérons pour l'instant que l'énoncé de la règle indique comment elle doit être appliquée, même si une règle ne peut prévoir tous les cas d'application possibles et, plus précisément, les cas litigieux d'application.

pendante d'une certaine géométrie des structures, et où une nuance est faite entre données réutilisables *ab libitum*, et données restreintes à un usage unique.

En tant que point de vue déconstructif, cette nouvelle conception du formel permet de récupérer en les clarifiant les différents objets développés par la logique au cours de son histoire : propositions, démonstrations, calculs. Ce faisant, elle internalise l'espace et le temps logiques dans la dynamique même de la structure logique. Ainsi, la procédure de démonstration ne permet aucune étape dont la signification temporelle ne saurait correspondre à une action concrètement exécutable, et les occurrences d'une même formule dans la démonstration sont différenciées par leur positionnement mutuel, permettant une traçabilité rigoureuse des données et des mécanismes interactifs. Dans le même temps, la logique a acquis une sensibilité extrême aux contextes et à la notion de ressource. En faisant disparaître l'arbitraire des règles structurelles, nous obtenons un système dans lequel toute falsification de la structure des données est proscrite. Une structure peut entrer en interaction avec les autres par la règle de coupure, et la signification portée par une structure correspond donc à l'ensemble des interactions rendues possibles par son environnement. Évidemment, chaque interaction porte en elle une signification ne serait-ce que par l'intensité⁹ même de la relation entretenue et le positionnement relatif des structures qu'elle induit : les structures se rencontrent, s'explorent et se reconnaissent mutuellement.

Il y a, dans cette façon d'envisager les mécanismes de démonstration, la réunion de deux dynamiques révélées mais séparées par le structuralisme logique. **(1)** La recherche de preuve correspond au fait d'élaborer une construction à partir d'une proposition indiquant ce qu'il est possible d'en attendre. C'est en quelque manière une démarche de compréhension de la proposition puisque, pour la démontrer, il faut la comprendre en échafaudant la structure de "ce qui la démontre". **(2)** L'élimination des coupures peut paraître complètement opposée à la recherche de preuves en ce qu'elle agit sur des preuves déjà constituées. Cependant, quelque chose les unit, car l'élimination des coupures finit par rendre une construction, équivalente mais différente, et qui correspond à la structure conceptuelle de la preuve initiale. Les deux dynamiques produisent donc des preuves, et leur réunion dans l'unité de l'interaction finit par résorber la notion de démonstration elle-même. L'interaction est une rencontre, qui donne lieu à des explorations mutuelles entre structures. Ce sont ces explorations qui définissent les structures, qui leur donnent une signification. Fondamentalement, il n'y a donc ni démonstration, ni calcul, seules existent les recherches éprouvées au cours des interactions.

⁹L'intensité peut s'entendre ici de différentes manières selon que l'on s'attache par exemple à la profondeur de l'exploration ou au nombre de connexions entre structures.